ارمغان بوشهر

مهدی رجبعلی‌پور
فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران
و مؤسسه آموزش عالی عرفان، کرمان

چکیده
در این مقاله، با بحثی پیرامون متغیرهای مستقل و تابع در تابع‌های مثلثاتی، فرض رادیان بودن متغیر مستقل برخی از این تابع‌ها را توجیه می‌کنیم.
کلیدواژه‌ها: متغیرهای مستقل، تابع، تابع‌های مثلثاتی، رادیان

مقدمه

در پانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در بوشهر، سؤالی مطرح شد که چرا معمولاً، متغیر مستقل تابع‌های مثلثاتی را برحسب رادیان می‌نویسند و اگر مثلاً درجه به‌جای آن بگذارند، چه اشتباهی ممکن است رخ دهد. بحث مزبور، انگیزه‌ای برای نوشتن مقالهٔ حاضر شد. با تابع سینوس آغاز می‌کنیم و موارد مشابه را به خوانندهٔ علاقمند، وا می‌گذاریم.

هر تابع $y= f(x)$ را می‌توان جدولی دو ستونی انگاشت که در یک ستون، مقدارهای متغیر مستقل و در ستون دیگر، مقدارهای متغیر تابع را نظیر به نظیر نوشته باشند. بدیهی است که اگر دامنهٔ تابع، یک مجموعهٔ بی‌نهایت عضوی باشد، نوشتن همهٔ مقدارها غیرممکن است و در محاسبه‌های رایانه‌ای، به نوشتن تعدادی متناهی بسنده می‌کنند. مثلاً در جدول سینوس‌ها، زاویه‌های ۰ تا ۹۰ درجه را به ترتیب، زیر هم، در یک ستون می‌نویسند و مقابل هر زاویه مقدار سینوس آن را در ستونی دیگر ثبت می‌کنند. در زمان‌های گذشته که رایانه نبود و یا اگر بود، استفاده از آن‌ها رایج نبود، سینوس هر زاویهٔ دیگر را با تقریب و درون‌یابی حساب می‌کردند. در جدول سینوس‌های صفحهٔ بعد، یک ستون هم برای مقدارهای زاویه (متغیر مستقل) بر حسب رادیان اضافه کرده‌ایم. بستگی به این که کدام یک از دو ستون «رادیان» یا «درجه» را به کار بگیریم یک تابع مثلثاتی خاص به دست می‌آوریم که از نظر هندسی هیچ فرقی با هم ندارند، ولی از نظر حسابان با هم متفاوتند.

تابع سینوسی

در جدول سینوس‌ها، از کنار هم گذاشتن ستون سمت چپ (رادیان) و ستون سمت راست (سینوس)، تابعی به دست می‌آید که آن را با دستور $y= \sin_r(x)$ نمایش می‌دهیم. همچنین با کنار هم گذاشتن ستون وسط (درجه) و ستون سمت راست (سینوس)، تابع دیگری به دست می‌آید که به صورت $y=\sin_d(x)$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که گفتیم اگر متغیر مستقل را زاویهٔ هندسی بگیریم و از اندازه (عددی) زاویه چشم بپوشیم، تابعی با دامنهٔ هندسی به دست می‌آید که آن را با نماد سادهٔ $y=\sin x$ نمایش می‌دهیم.

در تابع مثلثاتی هندسی نباید از مقدار زاویه سخن گفت بلکه باید به شکل آن اشاره کرد؛ مثلاً می‌گوییم سینوس زاویهٔ قائمه برابر با ۱ می‌باشد، سینوس نصف قائمه برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است، سینوس هر زاویه در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و غیره. اما وقتی که متغیر مستقل در مجموعه عددهای حقیقی قرار می‌گیرد دو تابع $y =\sin_r(x)$ و $y =\sin_d(x)$

متفاوت هستند؛ برخی از مقدارهای این دو تابع را در زیر نوشته‌ایم تا تفاوت‌ها را مشاهده کنید:

$\sin_d(۰)=\sin_r(۰)=۰$

$\sin_d(۱/۵)=۰/۰۲۶; \sin_r(۱/۵)=۰/۹۹۸$

$\sin_d(۹۰)=۱; \sin_r(۹۰)=۰/۸۹۴۰$

گرچه ســـینوس‌های «رادیانی» و «درجه‌ای» دو تابع متفاوت تعریف می‌کنند ولی یک رابطهٔ خطی ساده آن‌ها را به هم پیوند می‌زند؛ یعنی

$$\sin_r(x)=\sin_d(\frac{۱۸۰}{\pi}x), \sin_d(x)=\sin_r(\frac{\pi}{۱۸۰}x) \qquad (*)$$

توجه کنید که بسیاری از معادلات یا اتحادهای مثلثاتی بیش از آنکه جبری باشـــند، هندسی هستند و لذا به اندازهٔ زاویه‌ها وابسته نیستند. مثلاً معادلهٔ زیر یا اتحاد بعد از آن ربطی به واحد اندازه‌گیری زاویه‌ها ندارند:

$\sin x=۰/۵;$

$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

مشکل اساسی ما با تابع‌هایی از نوع زیر است:

$$y=۲x-\ln x+۳\sin x, \qquad (**)$$

که در آن عبارت ۲x برای هر دو نوع کمیت عددی و هندسی قابل تعریف است و همانند همهٔ چندجمله‌ای‌ها حساسیتی نسبت به واحد اندازه‌گیری نشان نمی‌دهد. لگاریتم گرچه برای شکل‌های هندسی بی‌معنی است ولی مانند چندجمله‌ای‌ها نسبت به واحد اندازه‌گیری بی‌تفاوت است. عبارت سینوس، نه تنها در حسابان بلکه در هندسه هم معنادار اســـت؛ البته نسبت به انتخاب واحد اندازه‌گیری حساسیت نشان می‌دهد. اینجا است که باید تکلیفمان را با واحد اندازه‌گیری روشن کنیم.

از این پس ما هیچ نیازی به مطالعهٔ تابع ســـینوس هندسی نداریم و لذا نماد آن را به تابع سینوس رادیانی اختصاص می‌دهیم؛ یعنی از این پس به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، قرار می‌گذاریم $\sin_r x=\sin x$. حال ببینیم اگر ســـینوس رادیانی به ســـینوس درجه‌ای تبدیل گردد، معادلهٔ (**) چه تغییراتی می‌کند. توجه کنید که اگر

$y=۲x-\ln x+۳\sin x,$

آنگاه، با فرض $(\sin x)'=\cos x$،

$$y'=۲-\frac{۱}{x}+۳\cos x$$

اما اگر سینوس را با سینوس درجه‌ای عوض کنیم، آنگاه بنا بر (*)،

جدول سینوس زاویه‌های ۰ تا ۹۰ درجه

رادیان	درجه	سینوس
۰/۰۰۰	۰	۰/۰۰۰
۰/۰۱۷	۱	۰/۰۱۷
۰/۰۳۵	۲	۰/۰۳۵
۰/۰۵۲	۳	۰/۰۵۲
/۰۷۰	۴	۰/۰۷۰
۰/۰۸۷	۵	۰/۰۸۷
۰/۱۰۵	۶	۰/۱۰۵
۰/۱۲۲	۷	۰/۱۲۲
۰/۱۴۰	۸	۰/۱۳۹
۰/۱۵۷	۹	۰/۱۵۶
۰/۱۷۵	۱۰	۰/۱۷۴
۰/۱۹۲	۱۱	۰/۱۹۱
۰/۲۰۹	۱۲	۰/۲۰۸
۰/۲۲۷	۱۳	۰/۲۲۵
۰/۲۴۴	۱۴	۰/۲۴۲
۰/۲۶۲	۱۵	۰/۲۵۹
۰/۲۷۹	۱۶	۰/۲۷۶
۰/۲۹۷	۱۷	۰/۲۹۲
۰/۳۱۴	۱۸	۰/۳۰۹
۰/۳۳۲	۱۹	۰/۳۲۶
۰/۳۴۹	۲۰	۰/۳۴۲
۰/۳۶۴	۲۱	۰/۳۵۸
۰/۳۸۴	۲۲	۰/۳۷۵
۰/۴۰۱	۲۳	۰/۳۹۱
۰/۴۱۹	۲۴	۰/۴۰۷
۰/۴۳۶	۲۵	۰/۴۲۳
۰/۴۵۴	۲۶	۰/۴۳۸
۰/۴۷۱	۲۷	۰/۴۵۴
۰/۴۸۹	۲۸	۰/۴۶۹
۰/۵۰۶	۲۹	۰/۴۸۵
۰/۵۲۴	۳۰	۰/۵۰۰
۰/۵۴۱	۳۱	۰/۵۱۵
۰/۵۵۹	۳۲	۰/۵۳۰
۰/۵۷۶	۳۳	۰/۵۴۵
۰/۵۹۳	۳۴	۰/۵۵۹
۰/۶۱۱	۳۵	۰/۵۷۴
۰/۶۲۸	۳۶	۰/۵۸۸
۰/۶۴۶	۳۷	۰/۶۰۲
۰/۶۶۳	۳۸	۰/۶۱۶
۰/۶۸۱	۳۹	۰/۶۲۹
۰/۶۹۸	۴۰	۰/۶۴۳
۰/۷۱۶	۴۱	۰/۶۵۶
۰/۷۳۳	۴۲	۰/۶۶۹
۰/۷۵۰	۴۳	۰/۶۸۲
۰/۷۶۸	۴۴	۰/۶۹۵
۰/۷۸۵	۴۵	۰/۷۰۷

رادیان	درجه	سینوس
۰/۸۰۳	۴۶	۰/۷۱۹
۰/۸۲۰	۴۷	۰/۷۳۱
۰/۸۳۸	۴۸	۰/۷۴۳
۰/۸۵۵	۴۹	۰/۷۵۵
۰/۸۷۳	۵۰	۰/۷۶۶
۰/۸۹۰	۵۱	۰/۷۷۷
۰/۹۰۸	۵۲	۰/۷۸۸
۰/۹۲۵	۵۳	۰/۷۹۹
۰/۹۴۲	۵۴	۰/۸۰۹
۰/۹۶۰	۵۵	۰/۸۱۹
۰/۹۷۷	۵۶	۰/۸۲۹
۰/۹۹۵	۵۷	۰/۸۳۹
۱/۰۱۲	۵۸	۰/۸۴۸
۱/۰۳۰	۵۹	۰/۸۵۷
۱/۰۴۷	۶۰	۰/۸۶۶
۱/۰۶۵	۶۱	۰/۸۷۵
۱/۰۸۲	۶۲	۰/۸۸۳
۱/۱۰۰	۶۳	۰/۸۹۱
۱/۱۱۷	۶۴	۰/۸۹۹
۱/۱۳۴	۶۵	۰/۹۰۶
۱/۱۵۲	۶۶	۰/۹۱۴
۱/۱۶۹	۶۷	۰/۹۲۱
۱/۱۸۷	۶۸	۰/۹۲۷
۱/۲۰۴	۶۹	۰/۹۳۴
۱/۲۲۲	۷۰	۰/۹۴۰
۱/۲۳۹	۷۱	۰/۹۴۶
۱/۲۵۷	۷۲	۰/۹۵۱
۱/۲۷۴	۷۳	۰/۹۵۶
۱/۲۹۲	۷۴	۰/۹۶۱
۱/۳۰۹	۷۵	۰/۹۶۶
۱/۳۲۶	۷۶	۰/۹۷۰
۱/۳۴۴	۷۷	۰/۹۷۴
۱/۳۶۱	۷۸	۰/۹۷۸
۱/۳۷۹	۷۹	۰/۹۸۲
۱/۳۹۶	۸۰	۰/۹۸۵
۱/۴۱۴	۸۱	۰/۹۸۸
۱/۴۳۱	۸۲	۰/۹۹۰
۱/۴۴۹	۸۳	۰/۹۹۳
۱/۴۶۶	۸۴	۰/۹۹۵
۱/۴۸۴	۸۵	۰/۹۹۶
۱/۵۰۱	۸۶	۰/۹۹۸
۱/۵۱۸	۸۷	۰/۹۹۹
۱/۵۳۶	۸۸	۰/۹۹۹
۱/۵۵۳	۸۹	۱/۰۰۰
۱/۵۷۱	۹۰	۱/۰۰۰

$$y = 2x - \ln x + 3\sin_d x = 2x - \ln x + 3\sin(\frac{\pi}{180}x),$$

و در نتیجه مشتق تابع به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$y' = 2 - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{60}\cos(\frac{\pi}{180}x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{60}\cos_d(x)$$

همچنین دورهٔ تناوب آن که بازهٔ تقریبی ۰ تا ۶/۲۸ بود اینک بازهٔ ۰ تا ۳۶۰ می‌باشد.

اثرگذاری رادیان

در این بخش از مقالــه، دقت می‌کنیم که چگونه واحد اندازه‌گیری زاویه، خود را در محاسبهٔ حد و مشتق نمایان می‌سازد. تأثیر آن در شکل تابع سینوسی واضح اســت؛ کافی اســت که فقط طول هر نقطه از منحنی ســینوس رادیانی را به اندازهٔ $\frac{180}{\pi} \approx 57/325$ کشش دهیــم تا منحنی نمایش تابع درجه‌ای حاصل شــود. لذا با دانستن مشتق تابع سینوس رادیانی، مشتق تابع ســینوس درجه‌ای به آسانی به دست می‌آید. می‌ماند ثابت کنیم که مشتق تابع سینوس رادیانی برابر با تابع کسینوس رادیانی است:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh + \cos x\sinh - \sin x}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} - \sin x \lim_{h\to 0}(\sin\frac{h}{2})(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}) = \cos x$$

که البته از دســتور معروف $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ بهره گرفته‌ایم. پس باید دید که چگونه واحد اندازه‌گیری زاویه در برهان این دســتور اخیر خودنمایی می‌کند. در صفحــهٔ xOy، نقطه‌هــای $O=(0,0)$، $A=(1,0)$، $B=(\cos t, \sin t)$ و $C=(1, \tan t)$ را در نظــر بگیرید و ملاحظه کنید که

$\frac{1}{2}\sin t =$ (مساحت مثلث OAB) $<$ (مساحت قطاع OAB)

$= \frac{1}{2}t <$ (مساحت مثلث OAC) $= \frac{1}{2}\tan t$

توجه شود که این نامســاوی‌ها وقتی برقرارند که زاویهٔ مرکزی t بر حســب رادیان باشد. (اگر t برحسب درجه باشد، آنگاه $\frac{\pi}{360}t =$ (قطاع مساحت OAB)

در نتیجــه، حد مطلــوب از حدگیــری دو طرف نامساوی‌های زیر به دست می‌آید:

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}$$

سخن پایانی

معلمان و اســتادان ریاضی ستمدیده‌ترین قشر جامعهٔ ما هستند. زیرا علاوه بر کار سخت و دستمزد کم، باید جور تصمیمات برنامه‌ریزانی را بکشــند که قوانیــن را در جهت منافــع اقلیت‌های خاصی وضع می‌کنند. در تدوین کتاب‌های درسی، به آنان فرصت اظهار مشکلات نمی‌دهند و تا آن‌ها به گوش شنوائی برســند، موسم کنکورهای رســمی و غیررسمی که زندگی مدرســان و اولیاء و دانش‌آمــوزان را مختل کرده‌انــد فــرا می‌رســد و باید چیــزی را که عقل سلیمشان نپذیرفته، شــتاب‌زده به دانش‌آموزانشان تدریس کنند. علاوه بر غائله رادیان که در بخش‌های قبل بــه آن پرداختیم، مســئله‌های دیگری هم در میان معلمان شرکت‌کننده در همایش بوشهر زمزمه می‌شد. مثلاً شــیر پاک خورده‌ای، میدان را از اغیار خالی دیده با تعویض تعریف استاندارد پیوستگی در کتاب‌های درسی، و قرار دادن شرایط کافی پیوستگی از چپ و راســت به جای آن، تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را از نعمت پیوستگی در مبدأ محروم کرده است؛ استادان ریاضی با چشمان خیره و دهان باز متحیر بودند که چرا بــا تولید این همه کارشــناس ریاضی بیکار در مملکت، نوگشایی و بسط دانشگاه‌های فرهنگیان در اهم دســتور کار دولت قرار گرفته است؟ چرا در این بلوای کسر بودجه برای دانشــگاه‌های مادر و چشم و چراغ کشــور، گرفتن دانشــجوهای حضوری را به برنامه‌های تعریف شــده پیام نــور اضافه کرده‌اند و حتــی مجوز دوره‌های تحصیلات تکمیلی را به آن‌ها داده‌اند، ...

متولی ریاضیات کشــور، قبل از هر کس، انجمن ریاضــی ایران اســت که حدود نیم قــرن پیش، بار ســنگین آن را بر دوش گرفت و یک کول کشاند تا شورای مرکزی انجمن‌های دبیران ریاضی استان‌ها، شــورای مرکزی خانه‌های ریاضیات و شاخهٔ ریاضی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، به کمکش شــتافتند. هر نوع تصمیم‌گیــری در مورد ریاضیات کشــور بدون توافق با انجمن مزبور، خیانت به علم و جوانان آینده کشور است.